Preuve à l'envers de la relation en p. 129 (cf. aussi notes début thèse)

$$j_{q_i}^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} dv\, \frac{1}{2} m v^2 v_i\, f^{(1)}(\underline{r},\underline{v};t)$$

$$f^{(1)}(\underline{r},\underline{v};t) = M(\underline{v}) \sum_{n\geq 0} \left[a_n S_{3/2}^{(n)}(v^2) v_j \nabla_j \ln T + b_n S_{3/2}^{(n)}(v^2) v_j \nabla_j \ln n + c_n \mathring{v_i v_j} S_{5/2}^{(n-1)}(v^2) \right] ; \mathring{v_i v_j} = v_i v_j - \frac{v^2}{d}\delta_{ij}$$

Ainsi en utilisant les propriétés de symétrie lors de l'intégration:

$$j_{q_i}^{(1)} = \frac{1}{2} m \sum_{n\geq 0} \int_{\mathbb{R}^d} dv\, M(v)\, v^2 v_i \left[a_n S_{3/2}^{(n)}(v^2) v_j \nabla_j \ln T + b_n S_{3/2}^{(n)}(v^2) v_j \nabla_j \ln n \right] \quad , a_0 = b_0 = 0$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{n}{\cancel{v_T^d}} \frac{1}{\pi^{d/2}} \cancel{v_T^d} \sum_{n\geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-c^2} v_T^3 c^2 c_i \left[a_n S_{3/2}^{(n)}(v_T^2 c^2) c_j \nabla_j \ln T + b_n S_{3/2}^{(n)}(c^2 v_T^2) c_j \nabla_j \ln n \right] v_T$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{n}{\pi^{d/2}} v_T^4 \sum_{n\geq 1} \left[a_n \nabla_j \ln T + b_n \nabla_j \ln n \right] \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-c^2} c^2 c_i c_j S_{3/2}^{(n)}(v_T^2 c^2)}_{\sim \delta_{ij}}$$

$$\sim \delta_{ij} \Rightarrow \; = \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-c^2} c^2 c_i^2 S_{3/2}^{(n)}(v_T^2 c^2)$$

$$= \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-c^2} c^4 S_{3/2}^{(n)}(v_T^2 c^2)$$

Mais comme les grandeurs macroscopiques $n, u,$ et T sont définies par $f^{(0)}$, alors on a $\int_{\mathbb{R}^d} dv\, x\, v^2 f^{(1)}(\underline{r},\underline{v};t) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, donc

$$j_{q_i}^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} dv\, \frac{1}{2} m v^2 v_i\, f^{(1)}(\underline{r},\underline{v};t) - \int_{\mathbb{R}^d} dv\, v_T^2 \frac{d+2}{2} v_i\, f^{(1)}(\underline{r},\underline{v};t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} dv\, \frac{1}{2} m v_i \left(v^2 - v_T^2 \frac{d+2}{2}\right) f^{(1)}(\underline{r},\underline{v};t)$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{n}{\pi^{d/2}} v_T^4 \sum_{n\geq 1} \left[a_n \nabla_j \ln T + b_n \nabla_j \ln n \right] \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-c^2} \left(c^2 - \frac{d+2}{2}\right) c_i c_j S_{3/2}^{(n)}(v_T^2 c^2)}_{\sim \delta_{ij}} \quad ; c_i c_j \to \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} c_k^2 \delta_{ij}$$

$$\sim \delta_{ij} \Rightarrow \; = \frac{1}{d} \delta_{ij} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-c^2} \underbrace{\left(c^2 - \frac{d+2}{2}\right) c}_{= -S_{3/2}^{(1)}(c^2)} S_{3/2}^{(n)}(v_T^2 c^2)\, c$$

Or il y a orthogonalité des $S_{3/2}^{(n)}(c^2)\, c$ dans $L^2\left[e^{-c^2}dx, \mathbb{R}^3\right]$, ainsi

$$j_{q_i}^{(1)} = -\frac{1}{2} m \frac{n}{\pi^{d/2}} v_T^4 \sum_{n\geq 1} \left[a_n \nabla_j \ln T + b_n \nabla_j \ln n \right] \delta_{ij} \frac{1}{d} \underbrace{\left\langle S_{3/2}^{(1)}(c^2)\, c \,\middle|\, S_{3/2}^{(n)}(v_T^2 c^2)\, c \right\rangle}_{\sim \delta_{n1}}$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{n}{\pi^{d/2}} v_T^4 \frac{1}{d} \left[a_1 \nabla_i \ln T + b_1 \nabla_i \ln n \right] \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-c^2} c^2 \left(c^2 - \frac{d+2}{2}\right) \left(\frac{m}{2} v_T^2 c^2 - \frac{d+2}{2} k_B T\right)$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{n}{\pi^{d/2}} v_T^4 \frac{1}{d} \frac{m}{2} v_T^2 \left[a_1 \nabla_i \ln T + b_1 \nabla_i \ln n \right] \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-c^2} c^2 \left[c^4 - (d+2) c^2 + \frac{(d+2)^2}{4} \right]$$

$$= \frac{m^2 n v_T^6}{4 \pi^{d/2} \cancel{d}} \left[a_1 \nabla_i \ln T + b_1 \nabla_i \ln n \right] \pi^{d/2} \left[\frac{d+4}{2} \frac{d+2}{2} \frac{\cancel{d}}{2} - (d+2) \frac{d+2}{2} \frac{\cancel{d}}{2} + \frac{(d+2)^2}{4} \frac{\cancel{d}}{2} \right]$$

$$= \frac{m^2 n v_T^6}{4} \frac{d+2}{4} \frac{1}{2} \left[\cancel{d}+4 - \cancel{2}(\cancel{d}+2) + (\cancel{d+2}) \right] \left[a_1 \nabla_i \ln T + b_1 \nabla_i \ln n \right]$$

$$= \frac{m^2 n v_T^6}{4} \frac{d+2}{4} \left[a_1 \nabla_i \ln T + b_1 \nabla_i \ln n \right] \quad ; v_T = \sqrt{2/\beta m} = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}} \quad ; v_T^6 = \frac{8}{\beta^3 m^3}$$

$$= \frac{\cancel{m^2} n}{4} \frac{8}{\beta^3 m^{\cancel{3}}} \frac{d+\cancel{2}}{4} \left[a_1 \nabla_i \ln T + b_1 \nabla_i \ln n \right]$$

$$= -\frac{d+2}{2} \frac{n}{\beta^3 m} \left[a_1 \nabla_i \ln T + b_1 \nabla_i \ln n \right]$$

(le signe vient de la redéfinition de $a_1 := -a_1$ et $b_1 := -b_1$)

Ou bien en redéfinissant $a_1 := a_1/T$; $b_1 := b_1/n$, alors:

$$j_{q_i}^{(1)} = -\frac{d+2}{2} \frac{n}{\beta^3 m} \left[a_1 \nabla_i T + b_1 \nabla_i n \right]$$

Conclusion: - ne dépend que de a_1 même dans le cas général

$\Rightarrow$ cela veut dire qu'en général, la troncation de $f^{(1)}$ au premier coefficient n'est pas une approx. pour les coeff. de transp.

Devine: résultats Chap.--Cowling valables seulement si $a_2=0$

(4.4,7) $[F,G]_1 = \int dc_1\, G_1 I_1[F]$

$$I_1[F] = \frac{1}{n_1^2}\int d\underline{c}\int de'\, g\alpha_1\, f_1^{(0)}f^{(0)}\left(F_1+F-F_1'-F'\right)$$

$$I_{12}[K] = \frac{1}{n_1 n_2}\int d\underline{c}_2\int de'\, g\alpha_{12}\, f_1^{(0)}f_2^{(0)}\,(K-K')$$

; $f^{(0)} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mc^2/2kT}$

$g = |c_1-c_2|$

$\alpha_1 =$ section efficace

F' : après collision

(7.4,1) $\underline{q}^{(1)} = -\frac{2k^2T}{3m}\underline{\nabla}T\int \underline{A}\cdot I(\underline{A})\,dc = \ldots = -\frac{5k^2T}{2m}a_1$

Car: $nI(\underline{A}) = f^{(0)}(\mathscr{C}^2-\frac{5}{2})\mathscr{C}$

Car:

(7.31,1) $\underline{\Phi}^{(1)} = -\frac{1}{n}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}\underline{A}\cdot\underline{\nabla}\ln T - \frac{2}{n}\underline{B}:\underline{\nabla}\underline{c}_0 + \ldots$

(7.3,7) $n^2 I(\underline{\Phi}^{(1)}) = -f^{(0)}\left[(\mathscr{C}^2-5/2)\,\underline{C}\cdot\underline{\nabla}\ln T + 2\,\underline{\mathscr{C}\overset{\circ}{\mathscr{C}}}:\underline{\nabla}\underline{c}_0\right]$

Car: $J^{(1)} = n^2 I(\underline{\Phi}^{(1)})$, avec : $\underbrace{f^{(1)} = f^{(0)}\Phi^{(1)}}$ (et 7.12,3)

$f = f^{(0)}+f^{(1)}+f^{(2)}+\ldots$

La forme utilisée ci-dessus pour $f^{(1)}$ n'est valide que si ~~$\Phi^{(1)}$ est~~

$f = f^{(0)}(1+\Phi^{(1)})+\ldots = \mathcal{M}(1+\Phi^{(1)})+\ldots$

Or si $a_2\neq 0$: $\quad\uparrow f^{(0)}=\mathcal{M}\ : a_2=0$

$f^{(0)} = \mathcal{M}(1+a_2 S_2)$

$$f^{(1)} = \mathcal{M}\,\Psi^{(1)} = \mathcal{M}\frac{\Psi^{(1)}}{1+a_2S_2}(1+a_2S_2) = f^{(0)}\frac{\Psi^{(1)}}{1+a_2S_2} \doteq f^{(0)}\,\Phi^{(1)} \quad \ldots \text{ok}$$

Cercignani

OR: $\underline{1+a_2S_2 : \exists \text{ zéros}}$!

$\Longrightarrow$ intégrales avec pôles...

En effet: on connaît $\Psi^{(1)}$: on a fait les calculs... etc... ok.
Maintenant pour coller au formalisme de Chap.-Cowling, on redéfinit $\Psi^{(1)} := \Psi^{(1)}/1+a_2S_2$

$\Longrightarrow \mathcal{A}(\mathscr{C}) = \sum a_p\, S_{3/2}^{(p)}(\mathscr{C}^2)$

$a_p = \int_{\mathbb{R}^d} dv\, \mathcal{M}(v)\frac{\Psi^{(1)}(v)}{1+a_2S_2}\, S_{3/2}^{(p)}(v^2)\,v$

$\longrightarrow$ ne converge pas !

($\exists$ pôles !)

on développe $\mathcal{A}$ en polyn. de Sonine (convergence de la série si on a un pôle? cf. p.128 Chap-Cowling).

$\Longrightarrow$ On a ainsi un nouveau coefficient a_1 qui est différent de celui obtenu précédemment.

$\Longrightarrow$ inconsistence ~~avec le résultat de~~ : on a deux a_1 différents :
1° obtenu par notre méthode approx. ~~Chap-Cow~~ Chap.--Enskog
2° obtenu pour coller au formalisme de Chap.-Cowling

Conclusion: en redéfinissant $\Psi^{(1)}$ par $\Psi^{(1)}/(1+a_2S_2)$ pour coller au formalisme Chap-Cowling, les a_p ne sont pas définis et donc les résultats de Chap.--Cowling pas utilisables. $\Longrightarrow$ il faut $\boxed{a_2=0}$ $\Longrightarrow$ inconsistence

Chapman-Enskog : modèle de Maxwell de l'annihilation balistique

Equation de Boltzmann au premier ordre dans Chapman-Enskog :

$$\left[\partial_t^{(0)} + J\right] f^{(1)} = A_i \nabla_i \ln T + B_i \nabla_i \ln n + C_{ij} \nabla_i u_j$$

; A_i, B_i, C_{ij} : connus
$J = -p\,L_a - (1-p)\,L_c$

Calcul exact

$$\begin{cases} \int dv\, m V_i V_j \to \text{identifie } \underline{P}^{(1)} : \eta \\ \int dv\, \frac{1}{2} m V^2 V_i \to \text{identifie } \underline{q}^{(1)} : K, \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{P}^{(1)} = p^{(0)} \delta_{ij} - \eta\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{d} \delta_{ij} \nabla_k u_k\right) \\ q_i = -K \nabla_i T - \mu \nabla_i n \end{cases}$$

Calcul approximatif

$$f^{(1)}(\underline{r}, \underline{v}; t) = \mathcal{A}_i \nabla_i T + \mathcal{B}_i \nabla_i n + \mathcal{Z}_{ij} \nabla_i u_j$$

$$\begin{cases} \eta^* = \dfrac{1}{\nu_\eta^*} \\ K^* = \dfrac{d-1}{d} \dfrac{1}{\nu_K^*} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu_\eta^* = \dfrac{1}{\nu_0} \dfrac{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(\underline{V})\, J\, \mathcal{Z}_{ij}}{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(\underline{V})\, \mathcal{Z}_{ij}} \\ \nu_K^* = \dfrac{1}{\nu_0} \dfrac{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(V)\, J\, \mathcal{A}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(V)\, \mathcal{A}_i} \end{cases}$$

<u>HYPOTÈSE</u> : développement de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{Z}$ en polyn. de Sonine :

$$\mathcal{A}_i(\underline{V}) = a_1\, \mathcal{M}(\underline{V})\, S_i(\underline{V})$$
$$\mathcal{B}_i(\underline{V}) = b_1\, \mathcal{M}(\underline{V})\, S_i(\underline{V})$$
$$\mathcal{Z}_{ij}(\underline{V}) = c_0\, \mathcal{M}(\underline{V})\, D_{ij}(\underline{V})$$

- pour le modèle de Maxwell, ce développement est <u>exact</u>. <u>Pourquoi</u> ? [i.e. $f^{(1)}$ au premier ordre → exact... c'est comme de dire que $a_2 = 0$]
- Littérature : "...this approximation is known to yield very precise results within a few percent ..." <u>Références</u> ?
- Propriété d'exactitude aussi valable pour le gaz granulaire ?